

Série n° 6

Exercice 1.

Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 11 \\ 7 & 13 & 20 & 26 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 12 & 15 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2.

Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

Exercice 3.

$$\text{Calculer le déterminant } D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}.$$

Exercice 4.

Montrer que le déterminant $D = \begin{vmatrix} 0 & -a_{21} & -a_{31} \\ a_{21} & 0 & -a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}$ est nul. En déduire que tout déterminant antisymétrique d'ordre impair est nul.

Exercice 5.

$$\text{Montrer que le déterminant } D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \text{ est divisible par } (x-1)^3.$$

Exercice 6.

$$\text{Quels sont les racines du polynôme } P(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ 2 & x & 3 & 4 \\ 2 & 3 & x & 4 \\ 2 & 3 & 4 & x \end{vmatrix}.$$

Correction de la série n°6.

Exercice 1.

$$a) \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -6 \end{vmatrix} \text{ (développement du déterminant suivant la première colonne)}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -4 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = -12 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -12.$$

$$b) \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 11 \\ 7 & 13 & 20 & 26 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -39 & -38 & -82 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 31L_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -39 & -38 & -82 \end{vmatrix} \text{ (développement du déterminant suivant la première colonne)}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} (L_3 \leftarrow L_3 - 39L_2)$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 5$$

$$c) \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 12 & 15 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & -4 & -8 & -11 \\ 0 & -9 & -34 & -44 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 12L_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} -3 & -4 & -6 \\ -4 & -8 & -11 \\ -9 & -34 & -44 \end{vmatrix} \quad (\text{développement du déterminant suivant la première colonne}) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -4 & -8 & -11 \\ -9 & -34 & -44 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - L_2) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 9L_1 \end{array} \right) \\
&= \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -10
\end{aligned}$$

Exercice 2.

a) Montrons par récurrence sur n que : $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$

On a : $\Delta_1 = |a_{11}| = a_{11}$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$; supposons que $\Delta_n = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$, alors, en développant suivant la ligne $n+1$,

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1n+1} \end{vmatrix} = a_{n+1n+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}a_{n+1n+1}.$$

En déduit de ce qui précède que : $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = n!$

b) $D_2 = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 4+x & 1 & 1 & 1 \\ 4+x & 1+x & 1 & 1 \\ 4+x & 1 & 1+x & 1 \\ 4+x & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4)$$

$$= (4+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

$$= (4+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \right)$$

$$= (4+x)x^3.$$

$$\begin{aligned} c) D_3 &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} = \\ & (a+b+c) \begin{vmatrix} c-b & a-c \\ a-b & b-c \end{vmatrix} = -(a+b+c)((c-b)^2 + (a-b)(a-c)). \end{aligned}$$

Exercice 3.

$$D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{pmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \quad (\text{développement du déterminant suivant la première colonne})$$

$$= a(b-a) \begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 1 & c-a & c-a \\ 1 & c-a & d-a \end{vmatrix}$$

$$= a(b-a) \begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & c-b & d-b \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{pmatrix}$$

$$= a(b-a) \begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & c-b \\ 1 & d-b \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c).$$

Exercice 4.

Montrons que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul. Rappelons qu'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est dite **matrice antisymétrique** si et seulement si :

$${}^t A = -A.$$

c'est-à-dire pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ $a_{ij} = -a_{ji}$, en particulier, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $a_{ii} = 0$.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice antisymétrique, alors

$$\det(A) = \det({}^t A) = \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & \dots & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & 0 & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n-1} & \dots & a_{n-2,n-1} & 0 & a_{n,n-1} \\ a_{1n} & \dots & \dots & a_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & \dots & -a_{2n} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1,1} & \dots & -a_{n-1,n-2} & 0 & -a_{n-1,n} \\ -a_{1n} & \dots & \dots & -a_{n,n-1} & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-2} & 0 & a_{n-1,n} \\ a_{1n} & \dots & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \det(A);
\end{aligned}$$

si n est impair, $\det(A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$; d'où $\det(A) = 0$.

Exercice 5.

$$\begin{aligned}
D(x) &= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1-x & 1-x^2 & 1-x^3 \\ 0 & 2-x & 3-x^2 & 4-x^3 \\ 0 & 4-x & 9-x^2 & 16-x^3 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-x & 1-x^2 & 1-x^3 \\ 2-x & 3-x^2 & 4-x^3 \\ 4-x & 9-x^2 & 16-x^3 \end{vmatrix} \quad (\text{développement suivant la première colonne}) \\
&= \begin{vmatrix} 1-x & 1-x^2 & 1-x^3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 15 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{pmatrix} \\
&= (1-x) \begin{vmatrix} 1 & 1+x & 1+x+x^2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 15 \end{vmatrix} \\
&= (1-x) \begin{vmatrix} 1 & -1+x & -2+x+x^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \end{pmatrix} \\
&= -(1-x) \begin{vmatrix} -1+x & -2+x+x^2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(1-x)(6(x-1) - 2(-2+x+x^2)) = -(1-x)(-2x^2+4x-2) = -2(x-1)^3.
\end{aligned}$$

Exercice 6.

Quels sont les racines du polynôme

$$P(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ 2 & x & 3 & 4 \\ 2 & 3 & x & 4 \\ 2 & 3 & 4 & x \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} x+9 & 2 & 3 & 4 \\ x+9 & x & 3 & 4 \\ x+9 & 3 & x & 4 \\ x+9 & 3 & 4 & x \end{vmatrix} (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4) \\
&= (x+9) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x & 3 & 4 \\ 1 & 3 & x & 4 \\ 1 & 3 & 4 & x \end{vmatrix} \\
&= (x+9) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2+x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x-3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & x-4 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{pmatrix} \\
&= (x+9) \begin{vmatrix} -2+x & 0 & 0 \\ 1 & x-3 & 0 \\ 1 & 1 & x-4 \end{vmatrix} = (x+9)(x-2)(x-3)(x-4)
\end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont : -9, 2, 3, 4. .



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Informatique
Optique
Chimie
Algèbre
Corrigés
Diapo
Exercices
Contrôles Continus
Langues
MTU
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..